УДК 519.9 ©

**ПАТКІН Є.Д.,** асистент
*Білоцерківський національний аграрний університет*
Patkin88@mail.ru

# ВИЗНАЧЕННЯ СПРАВЕДЛИВОЇ ЦІНИ РИЗИКОВОГО АКТИВУ

Описуються справедливі ціни ризикових активів і вказані умови того, що цей випадковий процес є мартингалом. Доведена непорожність множини мартингальних мір для еволюції певної акції та описана множина усіх мартингальних мір.

Знайдено умови непорожності множини мартингальних мір, що дозволить в наступних роботах знайти справедливі ціни для деривативів, зокрема для опціонів європейського, американського та азіатського типів, та описати суперхедж для кожного з цих цінних паперів.

**Ключові слова**: похідна Радона–Нікодима, мартингальна міра, ризиковий цінний папір.

**Постановка проблеми**: Визначення справедливої ціни ризикових активів на повних ринках є розв’язаною задачею, зокрема таку ціну можна знайти за формулою Блека–Шоулса, для неповних ринків це питання залишається відкритим.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій:** В Україні проблематика неповних ринків, пов’язана з асиметричністю інформації, досліджується рядом авторів, зокрема Б. С. Малиняк в [4, с. 7–17] доводить необхідність втручання держави в ринкову систему, а В. М. Горбачук в [5, с. 223–227] досліджує проблеми енергетичного сектора економіки, пов’язані з неповнотою, та побудував моделі їх вирішення.

**Мета роботи –** дослідження справедливої ціни цінного паперу на неповних ринках.

**Матеріал і методика досліджень.** У статті використовується математичний апарат теорії випадкових процесів, а саме теорія мартингалів та усі з цим пов’язані поняття. На сучасному етапі глобалізації світової економіки та розвитку фондового ринку актуальною стає задача інвестування коштів у цінні папери для отримання прибутку. Одним з інструментів визначення правильного «входу» в акцію є коректне визначення справедливої ціни через опис множини мартингальних мір. Більшість робіт з цієї тематики належать до моделювання поведінки активів на повних ринках, тобто ринках, на яких для еволюції кожного цінного паперу є своя єдина мартингальна міра. Однак, як показують дослідження, всі ринки є неповними, тобто не існує єдиної мартингальної міри для жодного ризикового активу. У зв’язку з цим постає задача опису всіх мартингальних мір для оцінювання вартості зобов’язання та побудови стратегії захисту інвестиції у цей цінний папір (хеджової стратегії). Саме до такого типу задач і належить задача, яка розв’язана в цій статті.

**Результати досліджень та їх обговорення.** В роботі дані необхідні та достатні умови того, чи є міра мартингальною для еволюції певного активу, математичні викладки опубліковано у [6]. Така задача вперше була поставлена в роботі [1], де було доведено відсутність арбітражу. В роботі [2], використовуючи стохастичне числення, встановлено це твердження для мартингальних мір, у яких похідна Радона–Нікодима обмежена згори.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \Im, P_0\}$ розглядаємо еволюцію ризикового активу, заданого законом

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1},\ n = \overline{1,N}, \tag{1}$$

де $\rho_n,\ n=\overline{1,N}$ набуває значень з інтервалу $(-1,c], 0<c<\infty$ і є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин, а неризиковий актив еволюціонує за законом $C_n \equiv 1,\ n=\overline{1,N}$. Тут

$$\Omega = \prod_{i=1}^{N} D_i,\ D_i = (-1,c],\ \omega = \{x_1,...,x_N\} \in \Omega,\ \Im = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}(D_i),\quad P_0 = \prod_{i=1}^{n} P_i,$$

де $\Im_n$ − мінімальна $\sigma$ –алгебра, породжена множинами:

$$C_{i_1,...,i_k}^{A_k} = \{\omega = \{x_i,...,x_N\}\}, (x_{i_1},...,x_{i_k}) \in A_k, A_k \in \mathrm{B}(\prod_{i=1}^{k} D_i),\ \ i_1,...,i_k \le n.$$

$$P_i(A)=\int_A dF_i(x_i),\ F_i(x_i)=P(\rho_i\le x),\qquad i=\overline{1,N},\ A\in \mathrm{B}(D_i\ .,$$

де $\mathrm{B}(D_i)$ − борелева сигма–алгебра, побудована на множині $D_i$ .

Припускаємо, що $\int_{-1}^{\infty}|x_n|dF_n(x_n)<\infty,\ n=\overline{1,N}.$

Нехай $M$ – сукупність усіх мір, стосовно яких $S_n$ є мартингал. Введемо на ній метрику

$$\rho(Q^k,Q)=\sup_{A\in\mathfrak{I}}\left|Q^k(A)-Q(A)\right|. \qquad (2)$$

В роботі [3] показано щільність у множині мартингальних мір спеціального класу мартингальних мір і доведено наступне твердження:

**Твердження.** Нехай $\int_{-1}^{0}xdF_n(x)<0,\int_{0}^{c}xdF_n(x)>0.$ Тоді множина мартингальних мір $Q$ таких, що

$$0<l<\frac{dQ}{dP^0}<L<\infty \qquad (3)$$

є щільною в загальній варіаційній топології [1] в множині розглянутих у роботі [3] мартингальних мір.

Опишемо всю сукупність мартингальних мір, стосовно якої $S_n$ є мартингал.

Нехай G – множина векторів виду $g=\{g_n(x_1,...,x_n)\}_{n=1}^{N}$, де $g_n(x_1,...,x_n)\epsilon\ \mathfrak{I}_n$ – вимірні і задовольняють наступні умови:

1. $g_n(x_1,...,x_n)\ge 0;$
2. $P_0(g_n(x_1,...,x_n)=0)=0;$
3. $\int_{-1}^{c}g_n(x_1,...,x_n)dF_n(x_n)=1;$ (4)
4. $\int_{-1}^{c}g_n(x_1,...,x_n)x_ndF_n(x_n)=0;$

Якщо $g_1,g_2\in G,\ а\ 0<\alpha<1,\ то\ \alpha g_1+(1-\alpha)g_2\in G,$ тобто G – опукла множина.

Кожному вектору g поставимо у відповідність міру P, еквівалентну до $P_0$ :

$$P(A)=\int_A\prod_{i=1}^{N}g_i(x_1,...,x_i)dP_0,\quad A\in\mathfrak{I} \qquad (5)$$

**Теорема**. Для того, щоб міра P виду (5) була мартингальною мірою для еволюції ризикового активу (1), необхідно і достатньо, щоб існував вектор $g\in G$ такий, що має місце (5).

**Доведення: Необхідність**.

Нехай існує вектор $g\in G$ такий, що для еквівалентної міри P має місце подання (5). Доведемо, що P – мартингальна міра.

Обчислимо $E^P\left\{S_n\middle|\mathfrak{I}_{n-1}\right\}$:

Нехай $A\in\mathfrak{I}_{n-1}$, де $A=B\times\prod_{i=n}^{N}D_i,\quad B\in\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{B}(D_i)$, тоді:

$$\int_A S_n dP = \int_A S_n \prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_i) dP_0 = \int_A (1+x_n) S_{n-1} \prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_i) dP_0 = \int_A S_{n-1}(1+x_n) \prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_N(x_N) =$$

$$= \int_{B\times \underbrace{[-1,c)\times...\times[-1,c)}_{N-n+1}} S_{n-1}(1+x_n) \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1,...,x_i) \prod_{i=n}^{N} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_N(x_N) =$$

$$= \int_B S_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_{n-1}(x_{n-1}) \int_{[-1,c)} (1+x_n) g_n(x_1,...,x_n) dF_n(x_n) \times ... \times$$

$$\times \int_{[-1,c)} g_{n+1}(x_1,...,x_{n+1}) dF_{n+1}(x_{n+1}) \times ... \times \int_{[-1,c)} g_N(x_1,...,x_N) dF_N(x_N) =$$

$$= \int_B S_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_{n-1}(x_{n-1}) \int_{[-1,c)} (1+x_n) g_n(x_1,...,x_n) dF_n(x_n) =$$

$$= \int_B S_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_{n-1}(x_{n-1}) =$$

$$= \int_{B\times \underbrace{[-1,c)\times...\times[-1,c)}_{N-n+1}} S_{n-1} \prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_i) dF_1(x_1)...dF_N(x_N) = E^P S_{n-1} \chi_A(\omega).$$

В рівностях в рядках (6)–(9) використано умову (3).

Внаслідок довільності $A \in \Im_{n-1}$ випливає потрібна рівність: $E^P\{S_n | \Im_{n-1}\} = S_{n-1}$.

**Достатність.** Нехай $P(A) = \int_A f(x_1,...,x_N) \prod_{i=1}^{N} dF_i(x_i)$ є мартингальною мірою. Тоді $E^P\{S_n | \Im_{n-1}\} \equiv S_{n-1}$. З останнього випливає, що $E^{P_0}\{(1+x_n) f(x_1,...,x_N) | \Im_{n-1}\} = 1$.

Доведемо існування вектору $g \in G$, який задовольняє наведеним у лемі умовам. Нехай $A \in \Im_{n-1}$, $A = B \times \underbrace{[-1,c)\times...\times[-1,c)}_{N-n+1}$, $B \in \prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{B}(D_i)$.

Покладемо $g = \{g_i(x_1,...,x_i)\}_{i=1}^{N}$, де

$$g_i(x_1,...,x_i) = \frac{\int_{\prod_{s=i+1}^{N} D_s} f(x_1,...,x_N) dF_{i+1}(x_{i+1})...dF_N(x_N)}{\int_{\prod_{s=i}^{N} D_s} f(x_1,...,x_N) dF_n(x_{i+1})...dF_N(x_N)}, \quad i = \overline{1,N}.$$

Очевидно, що

$$\prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_i) = f(x_1,...,x_n).$$

Доведемо, що $\int_{-1}^{c} g_n(x_1,...,x_n) x_n dF_n(x_n) = 0.$

$$\int_A (1+x_n)f(x_1,...,x_N)dF_1(x_1)...dF_N(x_N) = \int_A (1+x_n)\prod_{i=1}^{N} g_i(x_1,...,x_n)dF_1(x_1)...dF_N(x_N) =$$
$$= \int_B 1\times \int_{(-1,c]} g_n(1+x_n)dF_n(x_n)\times \int_{(-1,c]} g_{n+1}dF_{n+1}(x_{n+1})\times...\times \int_{(-1,c]} g_N dF_N(x_N) =$$
$$= \int_B 1\times \int_{(-1,c]} g_n(1+x_n)dF_n(x_n) = \int_B 1\times(1+\int_{(-1,c]} g_n x_n dF_n(x_n)) = F_n(A).$$

Або

$$\int_A 1\times(1+\int_{(-1,c]} g_n x_n dF_n(x_n)) = F_n(A).$$

$$F_n(A) + \int_A (\int_{(-1,c]} g_n x_n dF_n(x_n))dF_1(x_1)dF_{n-1}(x_{n-1}) = F_n(A),\ \forall A\in \Im_{n-1}.$$

Вище використана наступна тотожність: $\int_B dF_n(x_n) = \int_A dF_n(x_n)...dF_N(x_N).$

Після зменшення обох частин рівності на $F_n(A)$ отримуємо:

$\int_A (\int_{(-1,c]} g_n(x_1,...x_n)x_n dF_n(x_n))dF_1(x_1)...dF_{n-1}(x_{n-1}) = 0,$ або в наслідок довільності $A$:

$$\int_B (\int_{(-1,c]} g_n x_n dF_n(x_n))dF_1(x_1)...dF_{n-1}(x_{n-1}) = 0,\quad \forall B\in \mathrm{B}(\prod_{i=1}^{n-1} D_i).$$

З останнього співвідношення випливає, що $\int_{-1}^{c} g_n(x_1,...,x_n)x_n dF_n(x_n) = 0.$

**Лему доведено.**

**Висновки.** В роботі показано непорожність множини мартингальних мір для еволюції певної акції, та описана множина усіх мартингальних мір. Знайдено умови непорожності множини мартингальних мір, що дозволить в наступних роботах знайти справедливі ціни для деривативів, зокрема для опціонів європейського, американського та азіатського типів та описати суперхедж для кожного з цих цінних паперів.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**


1. Dalang R.C. Equivalent martingale measures and no–arbit–rage in stochastic sequrities market models / R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger // Stochastic and stochastic reports. – 1990. – Vol. 29. – P. 185–201.
2. Kabanov Yu. and Striker C. On equivalent martingale measures with bounded densities, UMR 6623, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franhe–Comte 16 Ronte de Gray, F–25030 Besancon Cedex, FRANCE.
3. Паткін Є. Д., Приклад побудови мартингальних мір // Є.Д. Паткін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. – 2013. – 4. – С. 59–62.
4. Управління державними доходами і видатками. За ред. Б. С. Малиняка; Тернопіль; Астон, 2015. С. 7–17.
5. Горбачук В. М . Організація неповних поєднаних енергоринків // В. М. Горбачук // Вісник Дніпропетровського університету; Серія «економіка». – 2011. – Вип. 5. – С. 223–227.
6. Паткін Є. Д. Опис мартингальних мір для однієї еволюції ризикових активів // Є.Д. Паткін // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, серія фізико-математичні науки. – 2015. – 3. – С. 25–28.


**REFERENCES**


1. Dalang R.C. Equivalent martingale measures and no–arbit–rage in stochastic sequrities market models / R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger // Stochastic and stochastic reports. – 1990. – Vol. 29. – P. 185–201.
2. Kabanov Yu. and C. Striker C. On equivalent martingale measures with bounded densities, UMR 6623, Laboratoire de Mathematiques, Universite de Franhe–Comte 16 Ronte de Gray, F–25030 Besancon Cedex, FRANCE.
3. Patkin Je. D., Pryklad pobudovy martyngal'nyh mir //Je. D. Patkin//Visnyk Kyi'vs'kogo nacional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, serija fizyko–matematychni nauky; 2013;4; S. 59–62.
4. Upravlinnja derzhavnymy dohodamy i vydatkamy. Za red. B. S. Malynjaka; Ternopil'; Aston, 2015. C. 7–17.
5. Gorbachuk V. M . Organizacija nepovnyh pojednanyh energorynkiv // V. M. Gorbachuk// Visnyk Dnipropetrovs'kogo universytetu; Serija «ekonomika». – 2011. – Vyp. 5. – S. 223–227.
6. Patkin Je. D. Opys martyngal'nyh mir dlja odnijei' evoljucii' ryzykovyh aktyviv, //Je. D. Patkin//Visnyk Kyi'vs'kogo nacional'nogo universytetu imeni Tarasa Shevchenka, serija fizyko–matematychni nauky; 2015. – 3. – S. 25–28.

**Определение справедливой цены рискового актива**
**Е.Д. Паткин**
Описаны справедливые цены рисковых активов и указаны условия того, что этот случайный процесс является мартингалом. Доказана непустота множества мартингальных мер для эволюции определенной акции и описана множество всех мартингальных мер.

Найдены условия непустоты множества мартингальных мер, что позволит в следующих работах найти справедливые цены деривативов, в частности для опционов европейского, американского и азиатского типов, и описать суперхедж для каждого из этих ценных бумаг.
**Ключевые слова:** производная Радона–Никодима, мартингальная мера, рисковый актив.

**Determination of fair prices of risk asset**
**I. Patkin**
This article describes the fair prices of risk assets , and specify the conditions that a given random process is martingale.

Determining the fair price of risk assets in the overall markets is a solution problem, in particular the price, you can find the formula of Black - Scholes, for incomplete markets, the question remains open.

Most of the works on this subject are modeling the behavior of the overall market assets, that is, markets in which the evolution of each security has a unique martingale world. However, research shows that all markets are incomplete, that is, there is no single measure martingalnoi for one risky asset. In this regard, the problem arises of describing all martingale measures for the valuation of liabilities and build strategies to protect investments in this security (hedging strategies). It is to this type of problems and belongs to a task which is solved in this article.

The state of economic theory and accumulated facts from the different branches of the economic science require to analyze the concept of the description of economy systems. The economic reality generates the problems the solution of that is only possible by a new paradigm of the description of economy system. The classical mathematical economics is based on a notion of the rational customer choise generated by a certain preference relation on some set of goods a consumer wanted and the concept of maximization of the firm profit. The sense of the notion of the rational consumer choise is that it is determined by a certain function, definding the choise of a consumer by maximization of it on a certain budget set of goods. Moreover, choises of consumers are independent. In the reality choises of consumers are not independent.
**Keywords:** martingale measure, Radon-Nikodim derivative, risk asset.

*Надійшла 06.10.2015 р.*